Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

# – Seconde séance d'exercices –

`calcul tensoriel sur une variété différentielle et équations de Maxwell en espace-temps courbe`

---

> Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

**Exercice 1 : contractions de tenseurs.** Soit $T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ un tenseur de rang $(m,n)$ et $S^{\mu_1\cdots\mu_{m'}}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n'}}$ un tenseur de rang $(m',n')$.

a. Vérifier explicitement que $T^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}\gamma}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}\gamma}$ sont les composantes d'un tenseur de rang $(m-1,n-1)$.

b. *Vérifier explicitement que $(TS)^{\mu_1\cdots\mu_{m+m'}}{}_{\nu_1\ldots\nu_n+n'} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}S^{\mu_{m+1}\cdots\mu_{m+m'}}{}_{\nu_{n+1}\ldots\nu_{n+n'}}$ sont les composantes d'un tenseur de rang $(m+m',n+n')$.

> ***Correction.***
>
> a. $T$ est un tenseur de rang $(m,n)$. Sous un changement de coordonnées $x \to x'(x)$, ses composantes se transforment donc comme
>
> $$T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} \to T^{\mu'_1\cdots\mu'_m}{}_{\nu'_1\ldots\nu'_n} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\nu'_n}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n}.$$
>
> En particulier, si l'on contracte les indices $\mu_m$ et $\nu_n$, on obtient
>
> $$\begin{aligned} T^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}\gamma}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}\gamma} &\to \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_{m-1}}}{\partial x^{\alpha_{m-1}}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{n-1}}}{\partial x^{\nu'_{n-1}}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\alpha_m}}\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\gamma'}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} \\ &= \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_{m-1}}}{\partial x^{\alpha_{m-1}}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{n-1}}}{\partial x^{\nu'_{n-1}}}\delta^{\beta_n}_{\alpha_m}T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} \\ &= \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_{m-1}}}{\partial x^{\alpha_{m-1}}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{n-1}}}{\partial x^{\nu'_{n-1}}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\gamma}{}_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\gamma} \end{aligned}$$
>
> qui est bien la règle de transformation des composantes d'un tenseur de rang $(m-1,n-1)$.
>
> b. Ce point se traite similairement au précédent, mais est plus long à écrire...

♡**Exercice 2 : densités tensorielles.** Une *densité de poids p* est une grandeur $A$ qui se transforme comme

$$A' = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right|^p A.$$

D'autre part, une *densité tensorielle de poids p* est une grandeur $T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ qui se transforme comme

$$T^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m}{}_{\beta'_1\ldots\beta'_n} = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right|^p \frac{\partial x^{\alpha'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha'_m}}{\partial x^{\mu_m}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\beta'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\beta'_n}} T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}.$$

a. Montrer que $g \equiv \det(g_{\alpha\beta})$ est une densité de poids 2. En déduire que $\sqrt{|g|}$ est une densité de poids 1.

b. Le symbole de Levi-Civita $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le symbole complètement antisymétrique et numériquement invariant sous les transformations de déterminant positif défini tel que $\tilde{\varepsilon}^{0123} = +1$. Montrer que $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids 1.

   INDICE : se rappeler des formules pour calculer le déterminant d'une matrice dont les colonnes sont les 4 vecteurs $A^{\alpha}{}_{(i)}$ (respectivement dont les lignes sont les 4 covecteurs $A^{(i)}{}_{\alpha}$) :

$$\det\left(A^{\alpha}{}_{(i)}\right) = A^{\alpha}{}_{(1)}A^{\beta}{}_{(2)}A^{\gamma}{}_{(3)}A^{\delta}{}_{(4)}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$
$$\det\left(A^{(i)}{}_{\alpha}\right) = A^{(1)}{}_{\mu}A^{(2)}{}_{\nu}A^{(3)}{}_{\rho}A^{(4)}{}_{\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

c. Montrer que $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids $-1$. Montrer que

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{-1} g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}g_{\gamma\nu}g_{\delta\rho}\tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

d. Montrer que le tenseur de Levi-Civita introduit au cours, défini par

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sqrt{|g|}\,\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

   est bien un tenseur.

***Correction.***

a. Soit $g \triangleq \det(g_{\alpha\beta})$. Sous une transformation $x \to x'(x)$, la métrique se transforme comme[a]

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}.$$

   Son déterminant se transforme par conséquent comme

$$\det(g_{\alpha\beta}) \to \det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}\right) = \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right]^2 \det(g_{\alpha\beta}).$$

   C'est bien la loi de transformation d'une densité de poids 2. Finalement, $\sqrt{|g|}$ se transforme bien comme une densité de poids 1, puisque

$$\sqrt{|g|} \to \sqrt{\left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right]^2 |g|} = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right| \sqrt{|g|}.$$

b. Sous une transformation $x \to x'(x)$, les covecteurs $A^{(i)}{}_{\alpha}$ ($i = 1,2,3,4$) se transforment comme

$$A^{(i)}{}_{\alpha} \to \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} A^{(i)}{}_{\alpha}.$$

Supposons que $\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) > 0$. Nous pouvons dès lors écrire

$$\begin{aligned}
&\det\left(A^{(i)}{}_{\alpha'}\right) = A^{(1)}{}_{\mu'} \dots A^{(4)}{}_{\sigma'} \tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \\
\Leftrightarrow\ &\det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} A^{(i)}{}_{\alpha}\right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma'}} A^{(1)}{}_{\mu} \dots A^{(4)}{}_{\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \\
\Leftrightarrow\ &\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \det\left(A^{(i)}{}_{\alpha}\right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma'}} A^{(1)}{}_{\mu} \dots A^{(4)}{}_{\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \\
\Leftrightarrow\ &\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) A^{(1)}{}_{\mu} \dots A^{(4)}{}_{\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma'}} A^{(1)}{}_{\mu} \dots A^{(4)}{}_{\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}
\end{aligned}$$

Cette relation doit être vérifiée quelque soient les covecteurs $A^{(i)}{}_{\alpha}$. On a donc

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma'}} \tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}.$$

Puisque la transformation $x \to x'(x)$ est inversible, on peut inverser les $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$. Nous obtenons finalement

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \dots \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

C'est bien la loi de transformation des composantes d'une densité tensorielle de poids 1, puisque par hypothèse $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) > 0$.

c. On procède de façon identique au point précédent pour montrer que $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids $-1$. Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que la quantité

$$g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} g_{\delta\rho} \tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho}$$

est complètement antisymétrique en les indices $\alpha\beta\gamma\delta$. Il existe donc une constante $K$ telle que

$$g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} g_{\delta\rho} \tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho} = K \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Pour déterminer $K$, on prend $\alpha\beta\gamma\delta = 0123$ :

$$g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{2\nu} g_{3\rho} \tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho} = K \underbrace{\tilde{\varepsilon}_{0123}}_{=+1}.$$

Et l'on voit que le membre de gauche de cette équation est (par définition du déterminant) égal à $g$. On a donc $K = g$, soit

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{-1} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} g_{\delta\rho} \tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

d. Puisque $\sqrt{|g|}$ est une densité de poids $+1$ et que $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids $-1$, il est clair que leur produit $\sqrt{|g|}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \triangleq \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids $+1-1=0$, c-à-d un tenseur. Si vous n'êtes pas convaincus, écrivez explicitement sa loi de transformation!

---

*a.* On relèvera l'abus de langage. C'est bien entendu des *composantes* de la métrique que nous parlons ici.

***Exercice 3 : formulation tensorielle des équations de Maxwell.** En espace-temps plat, les équations de Maxwell peuvent s'écrire de façon covariante comme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \qquad \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces équations se réduisent bien aux équations de Maxwell dans leur formulation vectorielle habituelle.

a. Montrer que les identités de Bianchi $\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$ sont une conséquence directe de la définition usuelle

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2}$$

b. Montrer que les équations (1) se réduisent aux équations de Maxwell habituelles

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Montrer en particulier que le champ électrique est $E_i \equiv F_{0i}$ et que le champ magnétique est $B_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$. Exprimer les densités de charge $\rho$ et de courant $\vec{j}$ en termes des composantes du quadri-vecteur $J^\mu$.
INDICE : on montrera que $B_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} \Leftrightarrow F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B_k$ et on se souviendra que $(\vec{\nabla}\times\vec{A})^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A_k$.

c. Montrer que les équations de Maxwell sont les équations du mouvement qui extrémisent l'action

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu\right).$$

***Correction.***

a. Tout d'abord, développons la notation $_{(\cdot)}$ des identités de Bianchi

$$\begin{aligned}\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} &= \frac{1}{3!}(\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\mu F_{rho\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} - \partial_\nu F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} - \partial_\rho F_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}\right)\cdot\end{aligned}$$

Ensuite utilisons l'expression du tenseur $F_{\mu\nu}$ en fonction de $A_\mu$

$$\begin{aligned}
3\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} &= \partial_\mu(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= \cancel{\partial_\mu\partial_\nu A_\rho} - \cancel{\partial_\mu\partial_\rho A_\nu} + \cancel{\partial_\nu\partial_\rho A_\mu} - \cancel{\partial_\nu\partial_\mu A_\rho} + \cancel{\partial_\rho\partial_\mu A_\nu} - \cancel{\partial_\rho\partial_\nu A_\mu} \\
&= 0\cdot
\end{aligned}$$

b. Montrons d'abord l'indice et comme on va souvent monter et descendre les indices, regardons comment les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ dépendent de $E_i$ et $B_i$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk}B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ilm}F^{lm} = -\frac{1}{2}(\delta^j_l\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_l)F^{lm} = -F^{jk} \\
\Rightarrow F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B_k
\end{aligned}$$

et $F^{0i} = -F^{i0} = -F_{0i} = -E_i = -E^i$. Regardons les composantes temporelles et spatiales des équations (1)

$$\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = J^0 \ , \ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = J^i$$

Le première équation donne $\partial_i E^i = J^0$ et on en déduit que $J^0 = \rho$, et la seconde équation donne $-\partial_0 E^i + \partial_j \varepsilon^{ijk}B_k = J^i$. Vectoriellement, cette dernière s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \partial_0 \vec{E}$$

et on en déduit que $J^i = j^i$. Pour les deux dernières équations, nous devons utiliser les identités de Bianchi. Regardons d'abord les composantes $0ij$ de ces équations

$$\begin{aligned}
3\partial_{[0}F_{ij]} &= \partial_0 F_{ij} + \partial_i F_{j0} + \partial_j F_{0i} \\
&= -\varepsilon_{ijk}\partial_0\varepsilon_{ijk}B^k - \partial_i E_j + \partial_j E_i \\
&\stackrel{!}{=} 0\cdot
\end{aligned}$$ [1]

En multipliant cette équation par $\varepsilon^{lij}$ et utilisant la relation $\varepsilon^{ijl}\varepsilon_{ijk} = 2\delta^l_k$,

$$\begin{aligned}
&-2\partial_0 B^l - 2\varepsilon^{lij}\partial_i E_j = 0 \\
\Rightarrow &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}\cdot
\end{aligned}$$

Enfin, regardons les composantes $ijk$ des équations de Bianchi

$$\begin{aligned}
3\partial_{[i}F_{jk]} &= \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} \\
&= \varepsilon_{jkl}\partial_i B^l + \varepsilon_{kil}\partial_j B^l + \varepsilon_{ijl}\partial_k B^l \\
&\stackrel{!}{=} 0\cdot
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on multiplie cette équation par $\varepsilon^{ijk}$ et on obtient la dernière équation de Maxwell

$$\begin{aligned}
&2\delta^i_l\partial_i B^l + 2\delta^j_l\partial_j B^l + 2\delta^k_l\partial_k B^l = 0 \\
\Rightarrow &\partial_i B^i = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}$$

c. Comme nous allons varier l'action par rapport à $A_\mu$, faisons apparaitre explicitement toute la dépendance en $A_\mu$ dans le terme $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

et varions ce terme par rapport à $A_\mu$

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 4\partial_\mu A_\nu \partial^\mu \delta A^\nu - 4\partial_\mu A_\nu \partial^\nu \delta A^\mu$$

La variation de l'action donne donc

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}^4 x \big(-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu \delta A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu \delta A^\mu - J_\nu \delta A^\nu\big) \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \big(\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu - J_\nu\big)\delta A^\nu \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \big(\partial^\mu F_{\mu\nu} - J_\nu\big)\delta A^\nu \\ &\stackrel{!}{=} 0\cdot \end{aligned}$$

Les équations du mouvement qui extrémisent l'action sont donc

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu\cdot$$

Le symbole ! sur le symbole égal signifie que nous imposons l'égalité suivante. Cela ne se déduit pas d'une simplification de l'étape précédente.

♡**Exercice 4 : équations de Maxwell dans le langage des formes différentielles.** Le but de cet exercice est de montrer que les équations de Maxwell en espace-temps courbe sont

$$\mathrm{d}(\star F) = \star J, \qquad \mathrm{d}F = 0$$

et que celles-ce se ramènent bien aux équations de l'électromagnétisme en relativité restreinte (1) dans un référentiel localement inertiel, comme requis par le principe d'équivalence.

a. Montrer que $\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}F = 0$.

b. *Montrer que pour une matrice carrée $M$, on a $\det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{Tr}(M) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Cette propriété est en fait valable pour toute matrice carrée.

c. Montrer que sous une variation de éléments de $M$, la variation de la quantité $\ln|\det M|$ est donnée par $\delta \ln|\det M| = \mathrm{Tr}\big(M^{-1}\delta M\big)$.

d. Montrer que $\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\sqrt{|g|}$.

e. Soit $F$ une 2-forme. Montrer que sa dérivée covariante satisfait à l'équation

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\big(\sqrt{|g|}F^{\alpha\nu}\big).$$

f. Montrer que pour une 2-forme $F$ à 4 dimensions, on a $(\star\mathrm{d}\star F)^\nu = \nabla_\mu F^{\mu\nu}$. Conclure que l' équation $\mathrm{d}(\star F) = \star J$ est valable pour tout système de coordonnées et se réduit aux équations de Maxwell de la Relativité Restreinte dans un référentiel localement inertiel. Pour ce faire, utiliser le fait que $\star\star J = J$ pour une 1-forme à 4 dimensions. (*Démontrer cette dernière propriété !)

g. *Montrer que les identités de Bianchi $\mathrm{d}F = 0$ sont automatiquement satisfaites si l'on suppose que que la 2-forme $F$ est *exacte*, c-à-d qu'il existe une 1-forme $A$ telle que $F = \mathrm{d}A$. Montrer que $F = \mathrm{d}A$ se réduit en fait à la définition usuelle (2).

***Correction.***

a. Tout d'abord, il est clair $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}$ sont bien les composantes d'une 2-forme. La propriété se montre directement en utilisant la définition de la dérivée extérieure :

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} \Leftrightarrow (\mathrm{d}F)_{\mu\nu\rho} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}F = 0.$$

b. Effectuons la preuve par induction sur la dimension $n \geq 2$ de la matrice carrée. Soit $M^{(2)} \in \mathbb{R}^2_2$. Notons

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Soit $\varepsilon \ll 1$. On a

$$\begin{aligned} \det(I + \varepsilon M) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon m_{11} & \varepsilon m_{12} \\ \varepsilon m_{21} & 1 + \varepsilon m_{22} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \varepsilon(m_{11} + m_{22}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n \geq 2$, et montrons qu'elle est également valide pour $n + 1$. Soit $M^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{n+1}_{n+1}$. On a

$$\det\left(I + \varepsilon M^{(n+1)}\right) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 + \varepsilon m_{11} & \varepsilon m_{12} & \cdots & \varepsilon m_{1\,n+1} \\ \hline \varepsilon m_{21} & & & \\ \vdots & & M^{(n)} & \\ \varepsilon m_{n+1\,1} & & & \end{array}\right)$$

En appliquant la règle des mineurs selon la première ligne (ou la première colonne), on se convainc que $\det\left(I + \varepsilon M^{(n+1)}\right) = (1 + \varepsilon m_{11}) \det M^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, et on obtient

$$\begin{aligned} \det\left(I + \varepsilon M^{(n+1)}\right) &= (1 + \varepsilon m_{11}) \det M^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= (1 + \varepsilon m_{11})\left(1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon(m_{11} + \operatorname{Tr} M^{(n)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M^{(n+1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

c. La variation recherchée est donnée par

$$\begin{aligned}
\delta \ln|\det M| &\triangleq \ln|\det(M+\delta M)| - \ln|\det M| \\
&= \ln\left|\frac{\det(M+\delta M)}{\det M}\right| \\
&= \ln\left|\det M^{-1}\det(M+\delta M)\right| \\
&= \ln\left|\det\Big(M^{-1}(M+\delta M)\Big)\right| \\
&= \ln\left|\det\Big(I+M^{-1}\delta M\Big)\right| \\
&= \ln\left|1+\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\delta M\right)\right| \\
&= \mathrm{Tr}\Big(M^{-1}\delta M\Big).
\end{aligned}$$

Pour le passage à la dernière ligne, nous avons utilisé le développement en série $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$.

d. D'une part, en utilisant l'expression explicite des symboles de Christoffel, on a

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\cancel{\partial_\mu g_{\alpha\lambda}} + \partial_\alpha g_{\mu\lambda} - \cancel{\partial_\lambda g_{\mu\alpha}}\right) = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\alpha g_{\mu\lambda}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\sqrt{|g|} = \partial_\alpha \ln\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \ln|g|.$$

En étendant la formule obtenue au point précédent (pour une variation arbitraire) au cas des dérivées partielles, nous obtenons donc

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big[g^{-1}\partial_\alpha g\Big] = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\alpha g_{\lambda\mu} = \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha},$$

qui est le résultat attendu.

e. On utilise la définition explicite de la dérivée covariante d'un tenseur :

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\nu} = \partial_\alpha F^{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}F^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}.$$

Le dernier terme du membre de droite de cette égalité s'annule, car il contient un object totalement symétrique entièrement contracté avec un object totalement antisymétrique. En utilisant le résultat du point précédent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha F^{\alpha\nu} &= \partial_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\sqrt{|g|}F^{\alpha\nu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\partial_\alpha F^{\alpha\nu} + \partial_\alpha\sqrt{|g|}F^{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\nu}\right).
\end{aligned}$$

f. Commençons par remarquer que la notation $\star(\mathrm{d}\star F) = J$ est formellement sensée, les objets situés de part et d'autre de l'égalité étant tous les deux des 1-formes. En composantes, on a

$$\begin{aligned}
(\star F)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
(\mathrm{d}\star F)_{\mu\nu\rho} &= \frac{3}{2}\partial_{[\mu}\left(\varepsilon_{\nu\rho]\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{3}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta[\nu\rho}\partial_{\mu]}\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\partial_\alpha\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
(\star\mathrm{d}\star F)^\sigma &= \frac{1}{3!}\frac{3}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta[\nu\rho}\partial_{\mu]}\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\delta^\sigma_{[\alpha}\delta^\mu_{\beta]}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\delta^\sigma_\alpha\delta^\mu_\beta\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\beta\left(\sqrt{|g|}F^{\sigma\beta}\right) \\
&= -\nabla_\beta F^{\sigma\beta} \\
&= \nabla_\beta F^{\beta\sigma}.
\end{aligned}$$

Au cours de ce développement, on a utilisé le fait que $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -4\delta^\mu_{[\rho}\delta^\nu_{\sigma]}$ sur une variété Lorentzienne.

Nous pouvons maintenant montrer que l'équation $\mathrm{d}\star F = \star J$ se réduit aux équations de Maxwell habituelles dans un référentiel localement inertiel : en prenant le dual de Hodge de l'équation $\mathrm{d}\star F = \star J$, on obtient

$$\star\mathrm{d}\star F = \star\star J = J, \tag{3}$$

puisqu'on peut montrer que $\star\star J = J$ pour toute 1-forme $J$ :

$$\begin{aligned}
(\star J)_{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}J^\alpha \\
(\star\star J)^\sigma &= \frac{1}{3!}\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}J^\alpha = J^\sigma.
\end{aligned}$$

L'équation (3) est une égalité entre deux 1-formes. En composantes, cette équation s'écrit

$$(\star\mathrm{d}\star F)^\alpha = J^\alpha,$$

soit

$$\nabla_\mu F^{\mu\alpha} = J^\alpha$$

en utilisant l'identité démontrée ci-dessus. Dans un référentiel localement inertiel, les symboles de Christoffel s'annulent et la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle habituelle. On retombe donc bien sur les équations de Maxwell valables en relativité restreinte

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = J^\alpha.$$

g. S'il existe une 1-forme $A$ tel que $F = \mathrm{d}A$, alors par la propriété de la dérivée extérieure $\mathrm{d}^2 = 0$,

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}^2 A = 0\cdot$$

Comme $A$ est une 1-forme, $A = A_\mu dx^\mu$ et les composantes de $F = \mathrm{d}A$ sont

$$F_{\mu\nu} = (\mathrm{d}A)_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\cdot$$